MV-ALGEBRE, TOPOI DI GROTHENDIECK E APPLICAZIONI

Tesi di dottorato in Matematica di Anna Carla Russo (8881000073)

Abstract

Questa tesi è un contributo al programma di ricerca 'topos come ponti' che ha lo scopo di sviluppare il potenziale unificante della nozione di topos di Grothendieck visto come uno strumento per collegare tra loro differenti teorie matematiche attraverso invarianti topos-teoretici. La metodologia generale appena menzionata è qui applica per studiare equivalenze categoriali già conosciute che nascono nell'ambito delle logiche a più valori, nonché per per produrne di nuove. Il contenuto della tesi è incluso in [22], [21] e [23].

Topoi di Grothendieck

La nozione di *topos di Grothendieck* fu introdotta da A. Grothendieck agli inizi degli anni '60 nella sua riformulazione della teoria dei fasci per la geometria algebrica. Egli considerò fasci non solamente su spazi topologici ma anche su *siti*, cioè categorie dotate di una cosiddetta topologia di Grothendieck. Egli definì i topoi (di Grothendieck) come delle categorie equivalenti a una categoria di fasci su di un sito. A causa del fatto che numerose proprietà degli spazi topologici possono essere naturalmente riformulate in termini di proprietà di categorie di fasci, i topoi di Grothendieck possono essere considerati come degli 'spazi generalizzati'.

Più tardi, W. Lawvere e M. Tierney osservarono che i topoi possono essere considerati ugualmente come degli 'universi matematici generalizzati' dove possiamo riprodurre la maggior parte delle costruzioni che effettuiamo abitualmente con gli insiemi, come ad esempio i prodotti, i coprodotti eccetera. Infatti i topoi di Grothendieck sono abbastanza ricchi in termini di struttura categoriale da permettere di considerare, al loro interno, modelli di una qualsiasi teoria del prim'ordine.

Alla fine degli anni '70, la scuola di logica categoriale di Montréal, che comprende in particolare M. Makkai, G. Reyes e A. Joyal, introdusse il concetto di *topos classificatore* di una teoria geometrica (cioè, una teoria su di una segnatura del prim'ordine dove gli assiomi sono dei sequenti geometrici costruiti a partire dalle formule atomiche utilizzando unicamente congiunzioni finitarie, disgiunzioni infinitarie e quantificazioni esistenziali). Essi aggiunsero in questo modo un terzo punto di vista sui topoi. Infatti, essi provarono che ogni teoria geometrica $\mathbb{T}$ ha, a meno di equivalenza categoriale, un unico topos classificatore $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, il quale è un topos di Grothendieck contente un *modello universale* $U_{\mathbb{T}}$ di $\mathbb{T}$, universale nel senso che ogni altro modello di $\mathbb{T}$ in ogni altro topos di Grothendieck $\mathcal{E}$ è, a meno di isomorfismi, l'immagine (l'immagine inversa) di un unico morfismo da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$. Viceversa, ogni topos di Grothendieck può essere considerato come il topos classificatore di una teoria geometrica. È possibile che due teorie matematiche distinte abbiamo, a meno di equivalenza categoriale, lo stesso topos classificatore; in questo caso diciamo che le teorie sono *Morita-equivalenti*. Pertanto, i topoi di Grothendieck possono essere considerati non solamente come degli spazi generalizzati o degli universi generalizzati, ma anche come delle teorie, considerate a meno di equivalenza di Morita.

Questa terza incarnazione della nozione di topos è divenuta la base della metodologia 'topoi come ponti' introdotta da Caramello in [12] e sviluppata negli ultimi anni. L'esistenza di differenti rappresentazioni dello stesso topos di Grothendieck, ottenuta per esempio grazie a differenti siti di definizione oppure da teorie matematiche Morita-equivalenti, permette di trasferire informazioni e risultati da una rappresentazione all'altra utilizzando invarianti topos-teoretici del topos come delle 'macchine' traduttrici.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \arrow[dl, dash, dashed, bend right] \arrow[dr, dash, dashed, bend left] & \\ \mathbb{T} & & \mathbb{T}' \end{tikzcd}$$

La potenza di questa tecnica risiede nel fatto che un dato invariante topos-teoretico può manifestarsi in maniera completamente diversa in termini di differenti siti di definizione dello stesso topos. Si può allora stabilire attraverso queste caratterizzazioni in termini di siti delle relazioni logiche oppure delle equivalenze tra proprietà o costruzioni completamente diverse facenti riferimento a siti diversi. Un esempio notevole è la costruzione di Fraïsse in teoria dei modelli stabilita in [18].

La teoria dei topoi in passato è stata già applicata con successo all'ambito delle logiche a più valori per stabilire rappresentazioni in termini di fasci di classi notevoli di MV-algebre, per esempio nel lavoro di E. J. Dubuc e Y. Poveda [31]) e di J. L. Castiglione, M. Menni e W. J. Botero ([24]). Altre rappresentazioni in termini di fasci sono state stabilite da A. Filipoiu e G. Georgescu ([33]), e da A. R. Ferraioli e A. Lettieri ([32]).

L'innovazione di questa tesi è quella di utilizzare metodi topos-teoretici con lo scopo di ottenere nuovi risultati e conoscenze concettuali di natura sia logica che algebrica su temi centrali nel contesto della teoria delle MV-algebre, che non sarebbero visibili con i metodi classici. Otteniamo questi risultati studiando i topoi classificatori di particolari teorie di MV-algebre e applichiamo la tecnica dei ponti ad equivalenza di Morita tra queste teorie e appropriate teorie di gruppi abeliani reticolari.

Logiche a più valori e MV-algebre

Motivato dal fatto che la logica classica non è in grado di descrivere situazioni che ammettono più di due risultati, J. Łukasiewicz introdusse nel 1920 una logica a tre valori aggiungendo ai tradizionali valori di verità 0 e 1, interpretati come "assolutamente falso" e "assoltamente vero", un terzo grado di verità tra di loro. Più tardi, egli presentò nuove generalizzazioni con n valori di verità (o addirittura una quantità numberabile o continua di questi ultimi).

La classe delle MV-algebre fu introdotta nel 1958 da C. C. Chang (cf. [25] e [26]) per fornire una semantica algebrica alla logica proposizionale a più valori di Łukasiewicz. Come questa logica è una generalizzazione della logica classica, le MV-algebre sono una generalizzazione delle algebre di Boole (queste ultime possono essere caratterizzate come le MV-algebre idempotenti).

Dopo la loro introduzione nel contesto della logica algebrica, le MV-algebre divengono un oggetto di studio indipendente e numerose applicazioni in diversi domini matematici sono state trovate. Le più notevoli sono in analisi funzionale (cf. [40]), nella teoria dei gruppi abeliani reticolari (cf. [40] e [29]) e nella teoria delle probabilità generalizzata (cf. Chapitres 1 et 10 de [42] per una visione generale).

Nella letterature possono essere trovate svariate equivalenze tra categorie di MV-algebre e categorie di gruppi abeliani reticolari (ℓ-gruppi, in breve). Ricordiamo le più importanti:

- l'*equivalenza di Mundici* (cf. [40]) tra la categoria totale delle MV-algebre e la categoria degli ℓ-gruppi con unità forte;
- l'*equivalenza di Di Nola-Lettieri* (cf. [29]) tra la categoria delle MV-algebre perfette (cioè le MV-algebre generate dal loro radicale) e la categoria totale degli ℓ-gruppi.

Noi osserviamo che queste equivalenza categoriali possono essere considerate come equivalenze tra categorie di modelli sugli insiemi di particolari teorie geometriche e mostriamo che queste teorie sono Morita-equivalenti, ossia, esiste un'equivalenza categoriale tra le loro categorie di modelli all'interno di ogni topos di Grothendieck $\mathcal{E}$, naturalmente in $\mathcal{E}$.

In questo modo otteniamo i seguenti risultati:

- un'equivalenza di Morita tra la teoria $\mathbb{MV}$ delle MV-algebre e la teoria $\mathbb{L}_u$ degli ℓ-gruppi con unità forte;
- un'equivalenza di Morita tra la teoria $\mathbb{P}$ delle MV-algebre perfette e la teoria $\mathbb{L}$ degli ℓ-gruppi.

Otteniamo in seguito che l'equivalenze di Morita che nasce dall'equivalenza di Di Nola-Lettieri è solamente una di una classe di equivalenze di Morita che otteniamo tra la teoria delle MV-algebre locali contenute in varietà proprie di MV-algebre e estensioni appropriate della teoria degli ℓ-gruppi.

Conseguenze dell'equivalenza di Morita tra $\mathbb{MV}$ e $\mathbb{L}_u$

Una conseguenza immediata dell'equivalenza di Morita derivante dall'equivalenza di Mundici è il fatto che la teoria (infinitaria) degli ℓ-gruppi con unità forte è di tipo prefascio. Questo deriva dal trasferimento della proprietà invariante di essere un topos di prefasci attraverso l'equivalenza di Morita. Ricordiamo che una teoria è di tipo prefascio se il suo topos classificatore è equivalente a un topos di prefasci. Ogni teoria algebrica finita, e più in generale ogni teoria cartesiana, è di tipo prefascio; così questa proprietà è trasferita dalla teoria delle MV-algebra a $\mathbb{L}_u$. Siamo interessati alle teorie di tipo prefascio in quanto godono di notevoli proprietà che non sono soddisfatte per ogni teoria geometrica.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}_{\mathbb{MV}} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{L}_u} & \\ \mathbb{MV} \arrow[ur, dashed, no head, bend left] & & \mathbb{L}_u \arrow[ul, dashed, no head, bend right] \end{tikzcd}$$

Modificando l'invariante considerato a livello del topos classificatore otteniamo nuovi risultati. Ad esempio, per il Teorema di Dualità di [11] (che stabilisce una biezione tra i sottotopos del topos classificatore di una data teoria geometrica e i quozienti di questa teoria), l'invariante dato dalla proprietà di essere un sottotopos induce una biezione tra i quozienti della teoria $\mathbb{MV}$ e quelli della teoria $\mathbb{L}_u$. Vale la pena sottolineare che questo risultato non può essere dedotto dall'equivalenza di Mundici. Ricordiamo che un quoziente di una teoria è un'estenzione sulla stessa segnatura ottenuta aggiungendo nuovi assiomi. A partire da un quoziente di $\mathbb{MV}$ otteniamo il quoziente corrispondente di $\mathbb{L}_u$ traducendo ogni assioma nel linguaggio degli ℓ-gruppi con unità forte utilizzando l'interpretazione dalla teoria $\mathbb{MV}$ alla teoria $\mathbb{L}_u$. Tuttavia, come abbiamo dimostrato, non esiste un'interpretazione nella direzione contraria che renderebbe banale la biezione tra i quozienti. Se adesso consideriamo la proprietà invariante degli oggetti di un topos di essere irriducibili, otteniamo una caratterizzazione logica degli ℓ-gruppi finitamente presentabili con unità forte. Sono gli ℓ-gruppi con unità forte che corrispondono alle MV-algebre finitamente presentate attraverso l'equivalenza di Mundici. Più precisamente, mostriamo che questi gruppi possono essere caratterizzati come gli ℓ-gruppi puntati finitamente presentati $\mathcal{G}$ con elemento distintivo v che è un unità forte per $\mathcal{G}$, oppure, equivalentemente, come gli ℓ-gruppi presentati da una formula che è irriducibile rispetto alla teoria degli ℓ-gruppi con unità forte. Utilizziamo quest'ultimo risultato per descrivere un metodo per ottenere un'assiomatizzazione di un quoziente di $\mathbb{MV}$ corrispondente a un dato quoziente della teoria $\mathbb{L}_u$. Inoltre, stabiliamo una forma di compattezza e completezza per $\mathbb{L}_u$, ottenuta a partire dalla proprietà invariante del topos classificatore di $\mathbb{MV}$ (e quindi di $\mathbb{L}_u$) di avere un oggetto terminale compatto e di avere abbastanza punti.

Infine, come caso particolare dell'equivalenza di Mundici, otteniamo una versione in termini di fasci dell'equivalenza di Mundici valida per ogni spazio topologico X, naturalmente in X.

Conseguenze dell'equivalenza di Morita tra $\mathbb{P}$ e $\mathbb{L}$ e lo studio del topos classificatore di $\mathbb{P}$

Come nel caso dell'equivalenza di Mundici, l'equivalenza di Morita derivante dall'equivalenza di Di Nola-Lettieri coinvolge una teoria algebrica, cioè la teoria $\mathbb{L}$ degli ℓ-gruppi. Così, la proprietà di essere di tipo prefascio è trasferita alla teoria coerente $\mathbb{P}$ delle MV-algebre perfette. Anche se le due teorie non sono bi-interpretabili, altre applicazioni della tecnica dei ponti portano a tre differenti livelli di bi-interpretabilità tra tre classi particolari di formule: formule irriducibili, sentenze geometriche e immaginari.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}_{\mathbb{P}} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{L}} \arrow[dl, dash, dashed, bend right] \arrow[dr, dash, dashed, bend left] & \\ \mathbb{P} & & \mathbb{L} \end{tikzcd}$$

Le formule irriducibili per la teoria $\mathbb{P}$ sono quelle che presentano le MV-algebre perfette finitamente presentabili, cioè le MV-algebre che corrispondono agli ℓ-gruppi finitamente presentati tramite l'equivalenza di Di Nola-Lettieri. Esse costituiscono l'analogo per la teoria $\mathbb{P}$ delle formule cartesiane nella teoria delle MV-algebre. Infatti, anche se la categoria $\mathbb{P}$-mod(**Set**) non è una varietà, essa è generata dai suoi oggetti finitamente presentati in quanto la teoria $\mathbb{P}$ è di tipo prefascio classificata dal topos [f.p.$\mathbb{P}$-mod(**Set**), **Set**]. Otteniamo anche una bi-interpretabilità tra la teoria dei gruppi abeliani reticolari e una teoria cartesiana $\mathbb{M}$ che assiomatizza i coni positivi di questi gruppi. Tale teoria è utilizzata per ottenere una riformulazione più semplice dell'equivalenza di Di Nola-Lettieri e per descrivere la bi-interpretazione parziale tra $\mathbb{L}$ e $\mathbb{P}$. Questa bi-interpretabilità tra $\mathbb{M}$ e $\mathbb{L}$ dona in particolare un'altra descrizione del gruppo di Grothendieck associato a un modello $\mathcal{M}$ di $\mathbb{M}$ come un sottoinsieme, piuttosto che come un quoziente come nelle definizione classica, del prodotto $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

In seguito, studiamo in dettaglio il topos classificatore della teoria delle MV-algebre perfette. Questo topos è rappresentato come un sottotopos del topos classificatore della teoria algebrica che assiomatizza la varietà generata dalla MV-algebra di Chang. Questo studio mette in luce la relazione tra queste due teorie, conducendo in modo particolare a un teorema di rappresentazione per le MV-algebre finitamente generate (resp. finitamente presentate) nella varietà di Chang come prodotto finito di MV-algebre perfette finitamente generate (presentate). È interessante notare che questo risultato, contrariamente alla maggior parte dei risultati di rappresentazione presenti in letteratura, è interamente costruttivo. Tra gli altri risultati, menzioniamo una caratterizzazione delle MV-algebre perfette corrispondenti ai gruppi abeliani reticolari finitamente presentati tramite l'equivalenza di Di Nola-Lettieri come gli oggetti finitamente presentati della varietà di Chang che sono perfetti, e la proprietà che la teoria che assiomatizza la varietà di Chang prova tutti i sequenti cartesiani (in particolare, ogni identità algebrica) che sono validi in ogni MV-algebra perfetta.

In seguito, rivisitiamo il teorema di rappresentazione ottenuto dall'analisi del topos classificatore di $\mathbb{P}$ dal punto di vista del prodotto sottodiretto di MV-algebre perfette, per ottenerne una prova concreta. Mostriamo anche che ogni MV-algebra nella varietà di Chang è un prodotto sottodiretto debole di MV-algebre perfette. Questi risultati hanno dei collegamenti stretti con la letteratura esistente sui prodotti booleani deboli di MV-algebre. Inoltre, nel contesto delle

MV-algebre nella varietà di Chang, generalizziamo la caratterizzazione di Lindenbaum-Tarski delle algebre di Boole che sono isomorfe a insiemi potenza come algebre di Boole atomiche e complete, e otteniamo una caratterizzazione intrinseca delle MV-algebre nella varietà di Chang che sono prodottu arbitrari di MV-algebre perfette. Questi risultati mostrano come la varietà di Chang costituisce una classe di MV-algebre che estende in maniera naturale la varietà delle MV-algebre di Boole.

Infine, trasferiamo i teoremi di rappresentazione per la MV-algebre nella varietà di Chang in termini di MV-algebre perfette sopra menzionati nel contesto degli ℓ-gruppi con unità forte e, generalizzando dei risultati in [2], mostriamo che la teoria delle MV-algebe perfette e puntate è Morita-equivalente alla teoria dei gruppi abeliani reticolari con unità forte (e quindi alla teoria delle MV-algebre).

Equivalenza di Morita per le MV-algebre locali in varietà proprie di MV-algebre

Osservando che le la classe delle MV-algebre perfette è l'intersezione della classe delle MV-algebre locali con una varietà propria di MV-algebra specifica, cioè la varietà di Chang, è naturale domandarsi cosa succede se si sostituisce questa varietà con una varietà di MV-algebre qualsiasi. Mostriamo che 'globalemente', cioè considerando l'intersezione con tutta la delle MV-algebre, la teoria delle MV-algebre locali non è di tipo prefascio, mentre se si restringe a una sotto varietà propria V, la teoria delle MV-algebre locali, indicata con il simbolo $\mathbb{L}oc_V$, è di tipo prefascio. Inoltre, mostriamo che queste teorie sono Morita-equivalenti ad appropriate teorie che estendono la teoria degli ℓ-gruppi. Più precisamente, sia $V = V(\{S_i\}_{i\in I}, \{S_j^{\omega}\}_{j\in J})$ (con I e J sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$), abbiamo una teoria $\mathbb{G}_{(I,J)}$ che è Morita-equivalente alla teoria $\mathbb{L}oc_V$ e che è scritta sulla segnatura ottenuta a partire da quella degli ℓ-gruppi aggiungendo un simbolo di costante e dei predicati proposizionali corrispondenti agli elementi di I e J. Le categorie di modelli insiemistici di queste teorie non sono in generale algebriche come nel caso delle MV-algebre perfette; nella Sezione 5.5.2 caratterizziamo le varietà V per le quali si ha algebricità precisamente come quelle varietà generate da una sola catena. Tutte le equivalenze di Morita contenute in questa nuova classe non sono banali, cioè non nascono a partire da bi-interpretazioni, come dimostriamo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}_{\mathbb{L}oc_V} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(I,J)}} \arrow[dl, dash, dashed, bend right] \arrow[dr, dash, dashed, bend left] & \\
\mathbb{L}oc_V & & \mathbb{G}_{(I,J)}
\end{tikzcd}$$

Metodi topos-teoretici sono qui utilizzati per ottenere risultati sia logici che algebrici. Più precisamente, presentiamo due assiomatizzazioni (non costruttivamente) equivalenti per la teoria delle MV-algebre locali nella sottovarietà propria V e studiamo la topologia di Grothendieck a loro associate come quozienti della teoria algebrica $\mathbb{T}_V$ che assiomatizza V. La sottocanonicità della topologica di Grothendieck associata alla prima assiomatizzazione assicura che la cartesianizzazione della teoria delle MV-algebre locali in V è la teoria $\mathbb{T}_V$. È interessante notare che questo risultato non si ottiene grazie ad un teorema di rappresentazione delle MV-algebre in V come prodotti sottodiretti o sezioni globali di fasci di modelli della teoria delle MV-algebre locali in V, cosa che renderebbe il risultato banale. Per verificare la dimostrabilità di un sequente cartesiano nella teoria $\mathbb{T}_V$, ci possiamo dunque ridurre a verificarla nella teoria delle MV-algebre locali in V. Grazie a questo proviamo facilmente che il radicale di ogni MV-algebra in V è definito da un'equazione che usiamo per presentare la seconda assiomatizzazione. Quest'ultima ha l'importante proprietà di avere la topologia di Grothendieck associata rigida. Questo ci permette di concludere che la teoria delle MV-algebre locali in V è di tipo prefascio. L'equivalenza delle due assiomatizzazioni e la risultante uguaglianza delle topologie di Grothendieck associate produce in particolare una rappresentazione di ogni MV-algebra finitamente presentata in V come prodotto finito di MV-algebre locali. Questo generalizza il risultato di rappresentazione ottenuto per la MV-algebre finitamente presentate nella varietà di Chang come prodotto finito di MV-algebre perfette. La teoria delle MV-algebre semplici (nel senso dell'algebra universale) è strettamente legata alla teoria delle MV-algebre locali; infatti una MV-algebra $\mathcal{A}$ è locale se e solo se il quoziente $\mathcal{A}/Rad(\mathcal{A})$ è una MV-algebra semplice. Questa teoria condivide numerose proprietà con la teoria delle MV-algebre locali; globalmente non è di tipo prefascio ma ha questa proprietà se ci restringiamo a una sottovarietà propria arbitraria. D'altra parte, mentre la teoria delle MV-algebre semplici di rango finito è di tipo prefascio (in quanto coincide con la teoria geometrica delle catene finite), la teoria delle MV-algebre locali di rango finito non lo è, come dimostrato.

***

Riassumendo, in questa tesi utilizziamo tecniche topos-teoretiche con lo scopo di studiare equivalenze di Morita ottenute 'sollevando' equivalenze categoriali che sono già conosciute nella letteratura delle MV-algebre e di stabilirne di nuove. Questo mostra che la teoria dei topoi è un forte strumento per scoprire nuove equivalenze in Matematica e per esaminare quelle che sono già conosciute.

I principali temi affrontati in questa tesi sono i seguenti:

- teorie di tipo prefascio;
- equivalenze di Morita e bi-interpretazioni;
- MV-algebre e gruppi abeliani reticolari;
- risultati di rappresentazione per classi di MV-algebre;
- cartesianizzazione per quozienti di $\mathbb{MV}$.

Un'attenzione particolare è posta al carattere costrittivo dei risultati; indichiamo con il simbolo * i punti in cui usiamo l'assioma della scelta.

Struttura della tesi

La tesi è organizzata nel modo seguente.

Capitolo 1. In questo capitolo ricordiamo le principali nozioni e risultati sulla teoria dei topoi. Ci concentriamo principalmente sulla tecnica dei 'topoi come ponti' e sulle nozioni di topos classificatore e teorie di tipo prefascio.

Capitolo 2. In questo capitolo introduciamo le classi di MV-algebre che sono studiate nella tesi, cioè le MV-algebre perfette, locali e semplici. Inoltre, stabiliamo qualche risultato preliminare sui rispettivi quozienti di $\mathbb{MV}$. Per esempio, mostriamo che la teoria delle MV-algebre locali e la teoria delle MV-algebre semplici non è di tipo prefascio. Inoltre introduciamo due assiomatizzazioni equivalenti per la teoria delle MV-algebre perfette e mostriamo che il radicale di ogni MV-algebra nella varietà di Chang è definibile da un'equazione. Questo risultato è necessario per definire il radicale di un modello della teoria delle MV-algebre perfette in un topos di Grothendieck arbitrario in quanto la definizione classica di radicale non è costruttiva. Deriviamo anche il fatto che il radicale non può essere definito da una formula geometrica in tutta la varietà delle MV-algebre come conseguenza del fatto che la classe delle MV-algebre semisemplici non è assiomatizzabile in modo geometrico.

Capitolo 3. In questo capitolo mostriamo che la teoria delle MV-algebre è Morita-equivalente a (ma non bi-interpretabile con) quella dei gruppi abeliani reticolari con unità forte. Questo generalizza la ben nota equivalenza di Mundici tra le categorie dei modelli sugli insiemi delle due teorie e permette di trasferire proprietà e risultati utilizzando metodi della teoria dei topos. Discutiamo diverse applicazioni, tra le quali una versione in termini di fasci dell'equivalenza di Mundici e una corrispondenza biunivoca tra le estensioni geometriche delle due teorie.

Capitolo 4. Stabiliamo, generalizzando l'equivalenza categoriale di Di Nola-Lettieri, un'equivalenza di Morita tra la teoria geometrica dei gruppi abeliani reticolari e qualla delle MV-algebre perfette. Inoltre, dopo aver osservato che le due teorie non sono bi-interpretabili in senso classico, identifichiamo , considerando degli invarianti topos-teoretici appropriati sul topos classificatore comune, tre livelli di bi-interpretabilità per categorie particolari di formule: formule irriducibili, sentenze geometriche e immaginari. Infine, studiando il topos classificatore della teoria delle MV-algebre perfette, otteniamo diversi risultati sulla sua sintassi e la sua semantica e anche una relazione con la teoria cartesiana della varietà generata dall'MV-algebra di Chang. Questi risultati includono una rappresentazione concreta dei modelli finitamente generati di quest'ultima teoria come prodotti finiti di MV-algebre perfette. Menzioniamo ugualmente un'equivalenza di Morita tra la teoria dei gruppi abeliani reticolari e quella dei monoidi cancellativi abeliani reticolari con elemento minimo.

Capitolo 5. In questo capitolo studiamo i quozienti della teoria geometrica delle MV-algebre locali, in particolare quelli che assiomatizzano la classe delle MV-algebre locali in una sottovarietà propria. Mostriamo che ognuno di questi quozienti è una teoria di tipo prefascio che è Morita-equivalente a un'estensione della teoria dei gruppi abeliani reticolari. L'equivalenza di Di Nola-Lettieri è ottenuta a partire dall'equivalenza di Morita per il quoziente che assiomatizza le MV-algebre locali nella varietà di Chang, cioè le MV-algebre perfette. Stabiliamo lungo la strada un certo numero di risultati di interesse indipendente, tra i quali un trattamento costruttivo del radicale per le MV-algebre locali in una fissata varietà propria di MV-algebre e un teorema di rappresentazione delle MV-algebre finitamente presentate in una tale varietà come prodotti finiti di MV-algebre locali.

Riferimenti bibliografici

[1] L. P. Belluce and C. C. Chang. A weak completeness theorem for infinite valued predicate logic. *Journal of Symbolic Logic*, 28:43–50, 1963.

[2] L. P. Belluce and A. Di Nola. Yosida type representation for perfect MV-algebras. *Mathematical Logic Quarterly*, 42:551–563, 1996.

[3] L. P. Belluce, A. Di Nola, and B. Gerla. Perfect MV-algebras and their Logic. *Applied Categorical Structures*, 15:135–151, 2007.

[4] L. P. Belluce, A. Di Nola, and B. Gerla. Abelian ℓ-groups with strong unit and perfect MV-algebras. *Order*, 25:387–401, 2008.

[5] L. P. Belluce, A. Di Nola, and A. Lettieri. Local MV-algebras. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, XLII:347–361, 1993.

[6] A. Bigard, K. Keime, and S. Wolfenstein. *Groupes et Anneaux Réticulés*, volume 608. Lecture Notes in Mathematics, 1977.

[7] G. Birkhoff. On the structure of abstract algebra. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31:433–454, 1935.

[8] A. Blass and A. Scedrov. Classifying topoi and finite forcing. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 28:111–140, 1983.

[9] L. Cabrer and D. Mundici. Finitely presented lattice-ordered abelian groups with order-unit. *Journal of Algebra*, 343:1–10, 2011.

[10] O. Caramello. De Morgan classifying toposes. *Advances in Mathematics*, 222:2117–2144, 2009.

[11] O. Caramello. Lattices of theories. ArXiv:math.CT/0905.0299, 2009.

[12] O. Caramello. The unification of mathematics via topos theory. ArXiv:math.CT/1006.3930, 2010.

[13] O. Caramello. Site characterization for geometric invariants of toposes. *Theory and Applications of Categories*, 26:710–728, 2012.

[14] O. Caramello. Syntactic characterizations of properties of classifying toposes. *Theory and Applications of Categories*, 26:176–193, 2012.

[15] O. Caramello. Universal models and definability. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 152:279–302, 2012.

[16] O. Caramello. Yoneda representations of flat functors and classifying toposes. *Theory and Applications of Categories*, 26:538–553, 2012.

[17] O. Caramello. Extensions of flat functors and theories of presheaf type. ArXiv:math.CT/1404.4610, 2014.

[18] O. Caramello. Fraïssé's construction from a topos-theoretic perspective. *Logica Universalis*, 8:261–281, 2014.

[19] O. Caramello. Topologies for intermediate logics. *Mathematical Logic Quarterly*, 60:335–347, 2014.

[20] O. Caramello. Topos-theoretic background. Preprint available at http://www.oliviacaramello.com/Unification/ToposTheoreticPreliminariesOliviaCaramello.pdf, 2014.

[21] O. Caramello and A. C. Russo. Lattice-ordered abelian groups and perfect MV-algebras: a topos theoretic perspective. To appear in *The Bullettin of Symbolic Logic*.

[22] O. Caramello and A. C. Russo. The Morita-equivalence between MV-algebras and lattice-ordered abelian groups with strong unit. *Journal of Algebra*, 422:752–787, 2015.

[23] O. Caramello and A. C. Russo. On the geometric theory of local MV-algebras. Arxiv:math.CT/1602.03867, 2016.

[24] J. L. Castiglioni, M. Menni, and W. J. Botero. A representation theorem for integral rigs and its applications to residuated lattices. Arxiv.math.CT/1510.06332, 2015.

[25] C. C. Chang. Algebraic analysis of Many Valued Logics. *Transactions of the American Mathematical Society*, 88:467–490, 1958.

[26] C. C. Chang. A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms. *Transaction of the American Mathematical Society*, 93:74–90, 1959.

[27] R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, and D. Mundici. *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, volume 7. Trends in Logic, 2000.

[28] A. Di Nola, I. Esposito, and B. Gerla. Local algebras in the representation of MV-algebras. *Algebra Universalis*, 56:133–164, 2007.

[29] A. Di Nola and A. Lettieri. Perfect MV-algebras are categorically equivalent to abelian ℓ-groups. *Studia Logica*, 53:417–432, 1994.

[30] A. Di Nola and A. Lettieri. Equational characterization of all varieties of MV-algebras. *Journal of Algebra*, 221:463–474, 1999.

[31] E. J. Dubuc and Y. Poveda. Representation theory of MV-algebras. *Annals of Pure and Applied Logic*, 161:1024–1046, 2010.

[32] A. R. Ferraioli and A. Lettieri. Representation of MV-algebras by sheaves. *Mathematical Logic Quarterly*, 57:27–43, 2011.

[33] A. Filipoiu and G. Georgescu. Compact and Pierce representations of MV-algebras. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 40:599–618, 1995.

[34] P. Gabriel and F. Ulmer. *Lokal präsentierbare Kategorien*, volume 221. Lecture Notes in Mathematics, 1971.

[35] J. Jacubík. Direct product decomposition of MV-algebras. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 44:725–739, 1994.

[36] P. T. Johnstone. *Sketches of an elephant: a topos theory compendium. Vols. 1-2*, volume 43-44. Oxford University Press, 2002.

[37] Y. Komori. Super-Łukasiewicz propositional logics. *Nagoya Mathematical Journal*, 84:119–133, 1981.

[38] V. Marra and L. Spada. The dual adjunction between MV-algebras and Tychonoff spaces. *Studia Logica*, 100:253–278, 2012.

[39] S. McLane and I. Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos theory.* Springer, New York, 1992.

[40] D. Mundici. Interpretation of AF C*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus. *Journal of Functional Analysis*, 65:15–63, 1986.

[41] D. Mundici. The Haar Theorem for lattice-ordered abelian groups with order-unit. *Discrete and Continuous Dinamical System*, 21:537–549, 2008.

[42] D. Mundici. *Advanced Łukasiewicz calculus and MV-algebras.* Trends in Logic, 35.

[43] G. Panti. Varieties of MV-algebras. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 9:141–157, 1999.

[44] J. A. J. Rosický and E. M. Vitale. *Algebraic theories: a categorical introduction to general algebra.* Cambridge University Press, 2010.

[45] A. J. R. Salas. *Un Estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Łukasiewicz.* PhD thesis, Universidad de Barcelona, 1980.